ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пример. Для дифференциального уравнения

$$y' - y = 0$$

одним из решений является функция $y = e^x$. Однако, это решение – не единственное: любая функция вида

$$y = Ce^x,$$

где C – постоянная, также является решением данного уравнения. Формула $y = Ce^x$ определяет общее решение уравнения $y' - y = 0$.

Поскольку в выражение $y = Ce^x$ входит произвольная постоянная C, то говорят, что множество решений уравнения $y' - y = 0$ зависит от одной произвольной постоянной C.

Придавая C определенное числовое значение, мы будем получать конкретные или, как говорят, частные решения уравнения $y' - y = 0$.

Иногда, дифференциальные уравнеия являются столь элементарными, что их общие решения находятся без знания специальных методов обычным интегрированием.

Упражнение

Найти общее решение $y' = x - 1$.

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' = 0.$$

Все решения этого уравнения могут быть найдены непосредственно. Из соотношения $y'' = 0$ (4) находим $y' = C_1$ и далее

$$y = C_1 x + C_2.$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Обратно, при любых значениях постоянных C_1 и C_2 функция $y = C_1 x + C_2$ является решением уравнения $y'' = 0$. Таким образом, формула $y = C_1 x + C_2$ определяет общее решение уравнения $y'' = 0$. Как видим, оно зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. При конкретных значениях C_1 и C_2 будем получать частные решения.

Упражнение

Найти общее решение $y'' = 1 - 2x$.

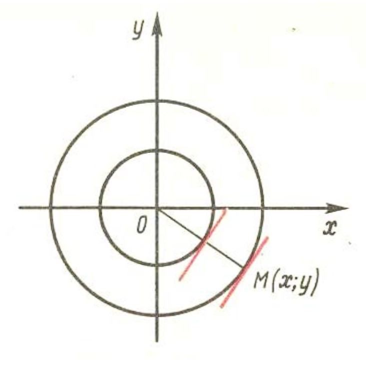
Общее решение зависит от стольких произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Частные же решения получаются из общего при конкретных значениях этих постоянных.

Пример. Описать геометрически поле направлений для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Решение

Правая часть уравнения определена на множестве $\mathcal{D}$, состоящем из всех точек (x, y), где $y \neq 0$**;** следовательно, уравнение задает на этом множестве поле направлений. Что касается точек, не принадлежащих $\mathcal{D}$, т. е. точек вида $(x, 0)$, то при $x \neq 0$ естественно считать, что и в таких точках уравнение задает определенное направление, а именно – направление, параллельное оси Oy (поскольку в этих точках $y' = \infty$). Таким образом, данное уравнение определяет поле направлений во всей плоскости, за исключением единственной точки $(0, 0)$. Это поле имеет простой геометрический смысл. Если $M(x, y)$ – точка, отличная от начала координат O, то прямая OM имеет угловой коэффициент $k = \frac{y}{x}$ перпендикулярная же ей прямая, проходящая через M, имеет угловой коэффициент – $k = -\frac{x}{y}$ что в силу $y' = -\frac{x}{y}$ совпадает с y'. Таким образом, в каждой точке M, отличной от начала, направление поля перпендикулярно прямой OM.



Кривая, которая в каждой своей точке M имеет направление поля (т.е. касается прямой OM, называется интегральной кривой данного поля направлений.

Из данного выше описания для направлений, соответствующего уравнению $y' = -\frac{x}{y}$, ясно, что интегральные кривые поля представляют собой окружности с центром в начале координат, к тому же заключению придем, решая данное уравнение непосредственно:

$$y' = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow yy' + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Мы получили уравнение вида $x^2 + y^2 = 2C,$ определяющее (при $C > 0$) окружность с центром в начале координат. В данном случае решение дифференциального уравнения привело к соотношению вида $F(x; y) = 0,$ определяющему y как функцию от x неявно.

Упражнение. Описать геометрически поле направлений для уравнения

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{2} - 1.$$

Мы уже поняли, что дифференциальное уравнение имеет, как правило, бесконечное множество решений. Чтобы из этого множества выделить какое-то конкретное решение, необходимо задать дополнительное условие.

Чаще всего такое условие ставится в форме следующей задачи, называемой задачей Коши:

Требуется найти решение $y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$ которое при заданном значении x_0 аргумента x принимает заданное значение y_0. Иначе говоря, требуется найти решение уравнения при начальном условии $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Ясно, что через каждую точку (x_0, y_0) должна проходить единственная интегральная кривая, т.е. задача Коши должна иметь единственное решение. Как правило, дело обстоит именно так. Однако возможны и такие случаи, когда задача Коши не имеет решения либо имеет не одно, а много решений. Чтобы гарантировать существование и единственность решения задачи Коши, следует подчинить функцию $f(x, y)$ некоторым ограничениям. Точная формулировка этих ограничений дается в следующей теореме Коши.

Теорема *(о существовании и единственности решения задачи Коши).* Если в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то существует такая окрестность точки (x_0, y_0), в которой задача Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y\big|_{x=x_0} = y_0$. имеет решение, и притом единственное.

Пример. Применим теорему к уравнению $y' = \sqrt[3]{y^2}$. Здесь $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$. Функция f определена на всей плоскости Oxy, однако ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ определена и непрерывна лишь в точках, где $y \neq 0$. Согласно теореме Коши, для каждой такой точки (x_0, y_0) существует окрестность, в которой задача Коши с начальным условием $y\big|_{x=x_0} = y_0$ имеет решение, и притом единственное.

Уточнение понятий общего и частного решений

Если задание начальной точки (x_0, y_0) определяет единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, то такое решение называется частным решением.

Иначе говоря, частное решение – это решение, однозначно определяемое начальным условием.

Множество всех частных решений называется общим решением дифференциального уравнения.

Обычно общее решение записывается в виде $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная. Задание начального условия позволяет определить значение постоянной C; она находится из равенства $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

В некоторых случаях процесс решения уравнения приводит не к явному выражению $y = \varphi(x, C)$ для общего решения, а к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющему y как неявно заданную функцию от x.

Общим интегралом уравнения $y' = f(x, y)$ называется соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ (где C – произвольная постоянная), из которого при различных значениях C получаются все частные решения уравнения.

Пример. Для уравнения $y' = y$ условия теоремы о существовании и единственности решения выполняются во всей плоскости Oxy. Формула $y = Ce^x$ дает общее решение, так как любое начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$. удовлетворяется при подходящем выборе постоянной C. Действительно, для определения C имеем равенство $y_0 = Ce^{x_0}$ откуда $C = y_0 e^{-x_0}$.

Пример. Для уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ условия теоремы о существовании и единственности решения выполнены во всей плоскости, за исключением точек оси Ox (где $y = 0$). Выше мы установили, что общий интеграл имеет вид $x^2 + y^2 = C$. Каковы бы ни были числа x_0 и y_0, где $y_0 \neq 0$ существует такое значение постоянной C (а именно, $C = x_0^2 + y_0^2$), при котором функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2 + y^2 = C$ удовлетворяет условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

В связи со сказанным можно внести некоторые уточнения в формулировку задачи о решении дифференциального уравнения. Слова «решить уравнение» обычно означают нахождение общего решения (или общего интеграла).

Пример. Найти все решения уравнения $y' = y^2$.

Решение

Это уравнение с разделяющимися переменными. Предполагая $y \neq 0$, можем записать

$$\frac{dy}{y^2} = dx,$$

откуда следует $-\frac{1}{y} = x + C$ или $y = -\frac{1}{x+C}$. Это общее решение уравнения. К нему следует добавить решение $y = 0$ (потерянное при переходе к уравнению $\frac{dy}{y^2} = dx$).

Упражнения

Решить уравнение $(1 + y^2)dx + xydy = 0$.

Решить задачу $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0;\ y(0) = 1$.

Пример. Решить уравнение $y' = \sin(x + y)$

Решение

Данное уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными, но оно приводится к нему заменой неизвестной функции $y(x)$ на $u(x) = x + y(x)$. Тогда $u' = 1 + y'$ и уравнение принимает вид $u' - 1 = \sin u$ или $u' = 1 + \sin u$. Предполагая $1 + \sin u \neq 0$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{du}{1 + \sin u} = dx.$$

т.е. получим уравнение с разделяющимися переменными.

Интегрируя обе части равенства (12), имеем

$$\int \frac{du}{1 + \sin u} = x + C.$$

Чтобы найти интеграл, записанный слева, используем подстановку $tg\frac{u}{2}=v$. Получаем

$$t\int\frac{du}{1+\sin u}=\int\frac{2dv}{(1+v)^2}=-\frac{2}{1+v}=-\frac{2}{1+tg\frac{u}{2}}.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения $\frac{du}{1+\sin u}=dx$ имеет вид

$$-\frac{2}{1+tg\frac{u}{2}}=x+C.$$

Подставляя вместо функции u ее выражение $x+y$, находим

$$x+\frac{2}{1+tg\frac{x+y}{2}}+C=0. \qquad (*)$$

Это соотношение не охватывает тех решений y, для которых $1+\sin u=0$ или, что то же самое, $\sin(x+y)=-1$. Для таких решений имеем

$$x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad (k\in \mathrm{Z}).$$

Итак, данное уравнение имеет общий интеграл (*), а также решения

$$y=-x-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad (k\in \mathrm{Z}).$$

Упражнения

Решить уравнения $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Решить задачу $(x+y)y'=1;\ y(0)=-1$.

К уравнениям с разделяющимися переменными сводится ряд других типов дифференциальных уравнений первого порядка. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Пример. Решить уравнение $y'=\frac{y+x}{y-x}$.

Решение

Это уравнение является однородным, так как

$$\frac{y+x}{y-x}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}=\frac{u+1}{u-1},$$

где $u = \dfrac{y}{x}$. Для функции u имеем уравнение

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1} - u} = \frac{dx}{x} \qquad \text{или} \qquad \frac{(u-1)du}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-u^2 + 2u + 1\right| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln C,$$

где $C > 0$ (произвольную постоянную для интеграла $\int \dfrac{dx}{x}$ удобно записать в виде $-\dfrac{1}{2}\ln C$), затем

$$\left|-u^2 + 2u + 1\right|^{-1/2} = |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{C}}$$

и, наконец,

$$x^2\left|1 + 2u - u^2\right| = C.$$

Знак модуля в последнем равенстве можно опустить вместе с ограничением на знак C. Возвращаясь к функции $y = xu$, получим

$$x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

Это общий интеграл данного уравнения. Из полученного соотношения нетрудно выразить y через x и найти общее решение.

В данном примере существуют такие значения u, для которых $f(u) - u = 0$; это корни уравнения $1 + 2u - u^2 = 0$, т.е. $u = 1 \pm \sqrt{2}$. Им соответствуют два решения $y = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)x$, которые можно получить из соотношения $x^2 + 2xy - y^2 = C$ при $C = 0$.

Упражнение

Решить уравнения:

а) $xdy = (x + y)dx$; б) $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$.

Пример. Полные издержки K есть функция объема производства x. Найти функцию издержек, если известно, что предельные издержки для всех значений x равняются средним издержкам.

Из условия задачи следует, что

$$\frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \text{ или } \frac{dK}{K} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dK}{dK} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|K| = \ln|x| + \ln|C|,$$

где

$$\ln|K| = \ln|Cx| + \ln C, \quad \text{или} \quad K = Cx,$$

и, наконец,

$$\frac{K}{x} = C\,.$$

Таким образом, средние издержки постоянны.

Пример. Предположим, что продавец имеет в данный период времени некоторый объем товара, который в течение этого периода не увеличивается за счет производства. Например, торговец зерном закупил урожай после уборки и в течение последующего года продает закупленную партию зерна с недельными интервалами вплоть до нового урожая. При данных запасах недельное предложение будет зависеть от ожидаемой цены в наступающей неделе и от предполагаемой динамики цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается понижение цепы, а в последующие недели – повышение, то предложение будет сдерживаться, если ожидаемое повышение цен превышает издержки хранения. Предложение товара в ближайшую наступающую неделю будет тем меньшим, чем большее ожидаемое повышение цены. И наоборот, если торговец ожидает, что в течение наступающей недели цена будет высокой, а на следующей неделе она упадет, предложение увеличится тем больше, чем больше предполагаемое понижение цены.

Введем обозначение: цена товара в наступающей неделе – $p(t)$, тенденция формирования цены – $\frac{dp}{dt}$ (производная цены по времени). При данном запасе предложения для поступающей недели можно описать зависимостью:

$$x = \left(p, \ \frac{dp}{dt} \right).$$

Это так называемая **динамическая функция предложения.**

Пример. Цена товара A вначале составляла 36, а через t недель – $p(t)$. Спрос определяется уравнением

$$q = 120 - 2p + 5\frac{dp}{dt},$$

а предложение

$$s = 3p - 30 + 50\frac{dp}{dt},$$

где q и s выражены в тыс. единиц.

Условие равновесие состоит в том, чтобы

$$120-2p+5\frac{dp}{dt}=3p-30+50\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$-45\frac{dp}{dt}=5p-150$$

и следовательно,

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{1}{9}(p-30),$$

откуда

$$\frac{dp}{p-30}=-\frac{1}{9}dt,$$

Интегрируя, получаем:

$$\int\frac{dp}{p-30}=-\int\frac{dt}{9}, \quad \text{или} \quad \ln|p-30|=-\frac{1}{9}t+\ln C,$$

откуда

$$\ln\left|\frac{p-30}{C}\right|=-\frac{1}{9}t, \quad \text{или} \quad \ln\left|\frac{p-30}{C}\right|=e^{-\frac{1}{9}t},$$

и, наконец,

$$p=Ce^{-\frac{1}{9}t}+30.$$

Из условия задачи следует, что $p=36$ для $t=0$. Отсюда $36=Ce^{0}+30$, или $C=6$.

Следовательно, чтобы для каждого значения $\boldsymbol{t}$ сохранилось равновесие, цена товара A должна изменятся по формуле

$$p=6e^{-\frac{1}{9}t}+30.$$

Как выше отметили условием, гарантирующим как существование решения, так и его единственность решения задачи Коши для уравнения $y'=f(x,\ y)$, является непрерывность функции $\frac{\partial f}{\partial y}$. В отдельных точках это условие может нарушаться; через такие точки может не проходить ни одной интегральной кривой или проходить несколько интегральных кривых.

Точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит более одной интегральной кривой, называются **особыми точками** данного дифференциального уравнения.

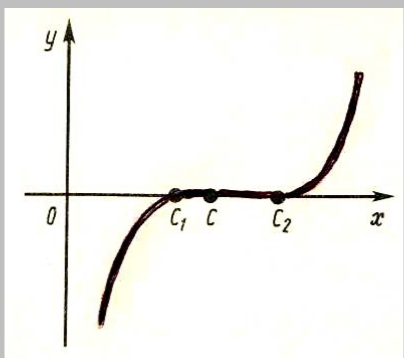
Может случиться, что некоторая интегральная кривая уравнения состоит из одних особых точек. Такая кривая называется **особым решением** уравнения.

Пример. Для уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ функция $f(x,\ y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна на всей плоскости Oxy. Ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ существует и непрерывна во всех точках, где $y \neq 0$, т.е. во всех точках, не принадлежащих оси Ox. Таким образом, через любую точку, не лежащую на оси Ox, проходит единственная интегральная кривая уравнения. Чтобы выяснить, как обстоит в этом смысле дело с точками оси Ox, проинтегрируем данное уравнение. Имеем

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx,$$

откуда следует $y^{1/3} + C = x$ или $y = (x - C)^3$.

Итак, общее решение представляет собой семейство кубических парабол. Однако имеется еще одно решение $y(x) = 0$. Следовательно, через любую точку $(C, 0)$ оси Ox проходят по крайней мере две интегральные кривые: ось Ox и парабола $y = (x - C)^3$. Это показывает, что точки оси Ox являются особыми точками уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, а функция $y \equiv 0$ – особым решением.



Нетрудно установить, что через любую точку вида $(C, 0)$ проходит в действительности бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить из трех кусков: «нижней» половины параболы $y = (x - C)^3$, где C_1 – число, меньшее или равное C (рис.), отрезка $[C_1,\ C_2]$ оси Ox, где $C_2 > C_1$, и «верхней» половины параболы $y = (x - C)^3$.

Упражнение

Выяснить, имеет ли уравнения $y' = 1 + \dfrac{3}{2}(y - x)^{\frac{1}{3}}$ особые решения. Найти их, если они существуют, построить интегральные кривые данногот уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' - 2xy = 2x.$

Решение

Это линейное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y' - 2xy = 0.$ Решая его, получаем

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx,$$

откуда

$$\ln|y| = x^2 + \ln C,\ \ (C > 0); \qquad y = \pm Ce^{x^2} = Ae^{x^2}.$$

где постоянная A может быть как положительной, так и отрицательной или нулем (случай $A = 0$ позволяет учесть решение $y = 0$, потерянное при переходе к уравнению $\frac{dy}{y} = 2x\,dx$).

Теперь находим частное решение $y_*(x)$, исходного уравнения в виде произведения:

$$y_*(x) = u(x)e^{x^2} = u(x)\,y_0(x),$$

где $y_0(x) = e^{x^2}$. Подставляя это выражение для $y_*(x)$, в уравнение $y' - 2xy = 2x$, получим

$$u'y_0 + uy_0' - 2xy_0u = 2x$$

откуда, учитывая, что $y_0' - 2xy_0 = 0,$ находим

$$u' = 2xe^{-x^2}.$$

Следовательно, $u = -e^{-x^2}$ (берем частное решение). Итак,

$$y_*(x) = -e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -1$$

(заметим, что это частное решение уравнения $y' - 2xy = 2x$ можно было обнаружить непосредственно). Теперь на основании теоремы находим общее решение уравнения $y' - 2xy = 2x$). Оно записывается в виде $y_*(x) + Cy_0(x),$ т.е. в виде $y(x) = -1 + Ce^{x^2}$.

Упражнение

Решить уравнения:

а) $(2x+1)y' = 4x + 2y$; б) $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$; в) $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1.$

Пример. Решить уравнение $y' + 2y = y^2e^{2x}.$

Решение

Сначала находим решение уравнения $y' + 2y = 0.$ В качестве такого решения можно взять функцию $y_0(x) = e^{-2x}.$ Затем полагаем $y(x) = e^{-2x}u(x).$

$y(x) = e^{-2x}u(x)$. Подставляя это выражение в уравнение $y' + 2y = y^2 e^{2x}$, получаем

$$e^{-2x}u' = e^{-4x}e^{2x}u^2 \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^2} = 1,$$

откуда $\frac{1}{u} = -x + C$, или $u = \frac{1}{-x + C}$. Окончательно имеем

$$y(x) = u(x)y_0(x) = \frac{e^{-2x}}{C - x}.$$

Упражнение

Решить уравнения:

а) $x^2 y' + 2xy - y^2 = 0$; б) $y' = y^4 \cos x + ytgx$; в) $y' + 2y = e^x y^2$;

г) $y' = ry - ky^2$ (логистическое уравнение).